📌 Rappel : Forme canonique d'un trinôme

La **forme canonique** d'une fonction quadratique est :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

où :

- α est l'abscisse du sommet : $\alpha = \frac{-b}{2a}$
- β est l'ordonnée du sommet : $\beta = f(\alpha)$

$f(x) = x^2 - 4x + 1$

$a = 1$, $b = -4$ et $c = 1$

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$

$f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$

$f(x) = (x-2)^2 - 3$

$f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

$a = 3$ $b = -5$ et $c = 1$

$\alpha = \frac{5}{6}$

$\circ\ f\left(\frac{5}{6}\right) = 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{6}\right) + 1 = -\frac{13}{12}$

$f(x) = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{13}{12}$

$f(x) = 4x^2 + 7x - 1$

$a = 4$, $b = 7$ et $c = -1$

$\bullet\ \alpha = \frac{-7}{8}$

$\bullet\ f\left(-\frac{7}{8}\right) = \frac{-65}{16}$

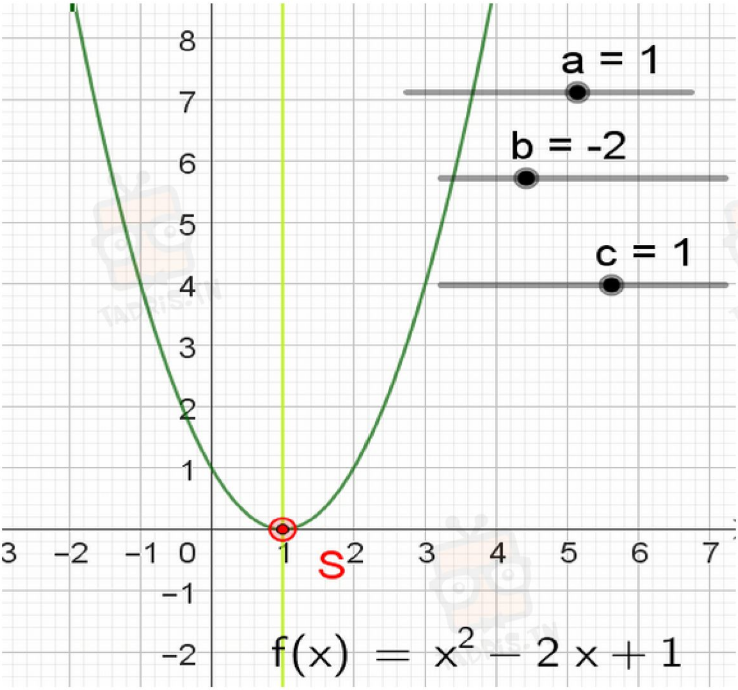
$f(x) = 4\left(x + \frac{7}{8}\right)^2 - \frac{65}{16}$

$a^2 - 2ab + b^2 - b^2$

$f(x) = x^2 - 6x + 1$

$= (x-3)^2 - 9 + 1$

$= (x-3)^2 - 8$



$f(x) = x^2 - 2x + 1$

$a = 1$, $b = -2$ et $c = 1$

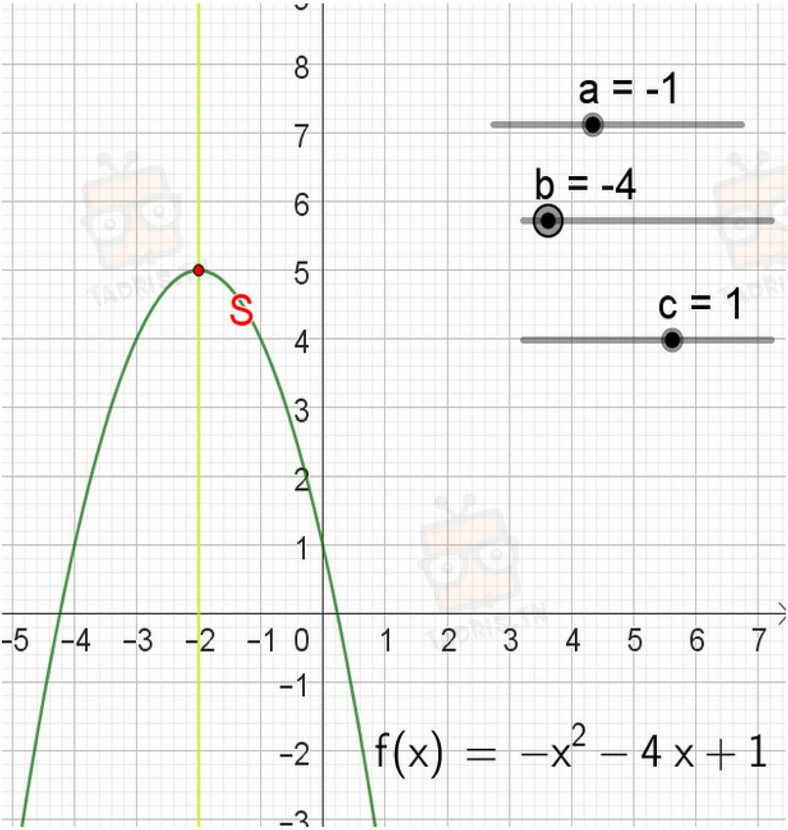
$\alpha = -\frac{b}{2a} = 1$

$f(\alpha) = 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 0$

$\left.\begin{matrix} \alpha = -\frac{b}{2a} = 1 \\ f(\alpha) = 1^2 - 2\times 1 + 1 = 0 \end{matrix}\right\}$ $S(1,0)$ sommet du parabole

$\Delta : x = 1$ Axe de symetrie de parabole

Forme canonique $f(x) = (x-1)^2$



$f(x) = -x^2 - 4x + 1$

$a = -1$, $b = -4$ et $c = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-(-4)}{2(-1)} = -2 \\ \bullet\ f(-2) = -(-2)^2 - 4(-2) + 1 = 5 \end{array}\right\} S(-2, 5)$$

$D : x = -2$ Axe de symétrie du parabole

Forme canonique

$$f(x) = -(x+2)^2 + 5$$

$$f(x) = -x^2 + 4x - 2$$

$a = -1$, $b = 4$ et $c = -2$

- $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$
- $f(2) = 2$

$\Big\}\ S(2,2)$

Sommet du parabole

$\Delta : x = 2$ Axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$

$$f(x) = -x^2 + 4x$$

$a = -1$, $b = 4$

- $\alpha = -\frac{b}{2a} = 2$
- $f(2) = 4$

$$\boxed{f(x) = -(x-2)^2 + 4}$$

$-\infty \quad a \quad b \quad 2 \quad a \quad b \quad +\infty$

- Soit a, b deux réels de $]-\infty, 2]$

$a < b \leq 2 \Rightarrow a-2 < b-2 \leq 0$

$\Rightarrow (a-2)^2 > (b-2)^2$

$\Rightarrow -(a-2)^2 < -(b-2)^2$

$\Rightarrow -(a-2)^2+4 < -(b-2)^2+4$

$\Rightarrow f(a) < f(b)$

$\Rightarrow f$ croissante sur $]-\infty, 2]$

Soit a et b deux réels de $[2, +\infty[$

$2 \leq a < b \Rightarrow 0 \leq a-2 < b-2$

$\Rightarrow (a-2)^2 < (b-2)^2$

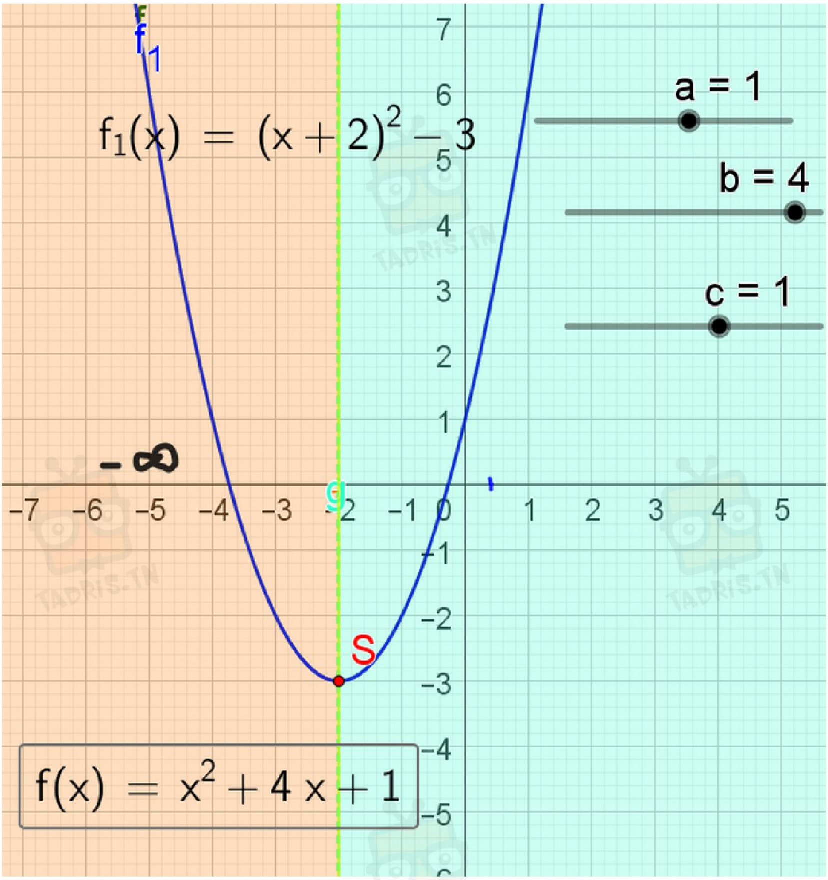
$\Rightarrow -(a-2)^2 > -(b-2)^2$

$\Rightarrow -(a-2)^2+4 > -(b-2)^2+4$

$\Rightarrow f(a) > f(b)$

$\Rightarrow f$ décroissante sur $[2\,;+\infty[$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$



$f(x) = x^2 + 4x + 1$

$a = 1$, $b = 4$ et $c = 1$

• $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$

• $f(-2) = -3$

$$\boxed{f(x) = (x+2)^2 - 3}$$

• $S(-2, -3)$ sommet de P

$\Delta : x = -2$ Axe de symétrie de P

$-\infty$	α et β	-2	α et β	$+\infty$

• soit α et β deux réels de $]-\infty, -2]$

$\alpha \boxed{<} \beta \leq -2 \Rightarrow \alpha + 2 < \beta + 2 \leq 0$

$\Rightarrow (\alpha + 2)^2 > (\beta + 2)^2$

$\Rightarrow (\alpha + 2)^2 - 3 > (\beta + 2)^2 - 3$

$\Rightarrow f(\alpha) \boxed{>} f(\beta) \Rightarrow f$ décroissante sur $]-\infty, -2]$

Soit α et β deux réels de $]-2,+\infty[$

$-2 \leq \alpha < \beta \Rightarrow 0 \leq \alpha + 2 < \beta + 2$

$\Rightarrow (\alpha+2)^2 < (\beta+2)^2$

$\Rightarrow (\alpha+2)^2 - 3 < (\beta+2)^2 - 3$

$\Rightarrow f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow f$ croissante sur

$[-2,+\infty[$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f		$\searrow$	-3	$\nearrow$	

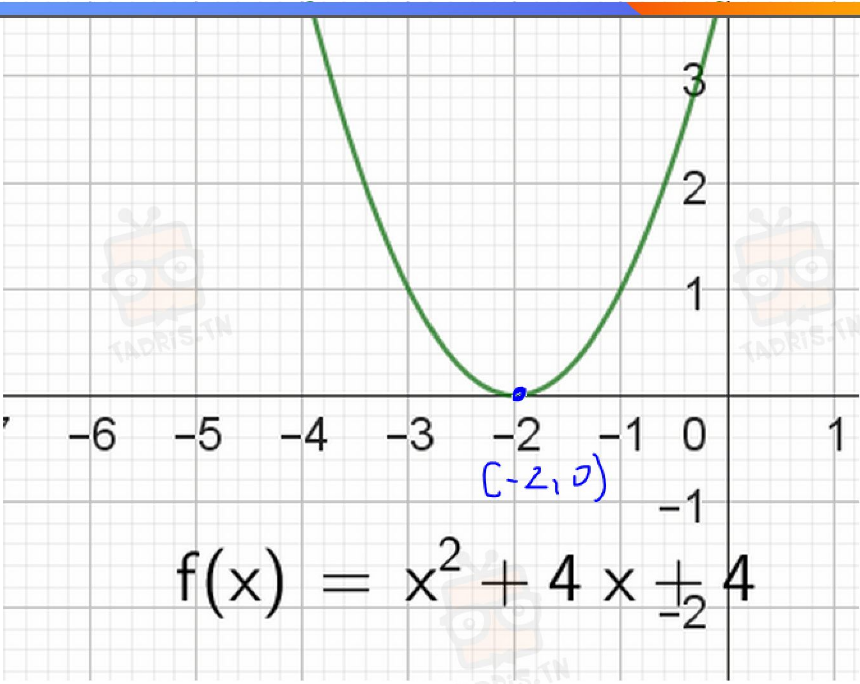
l'intersection avec l'axe des abscisses

✅ **Méthode** : utiliser le **discriminant**

On calcule :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

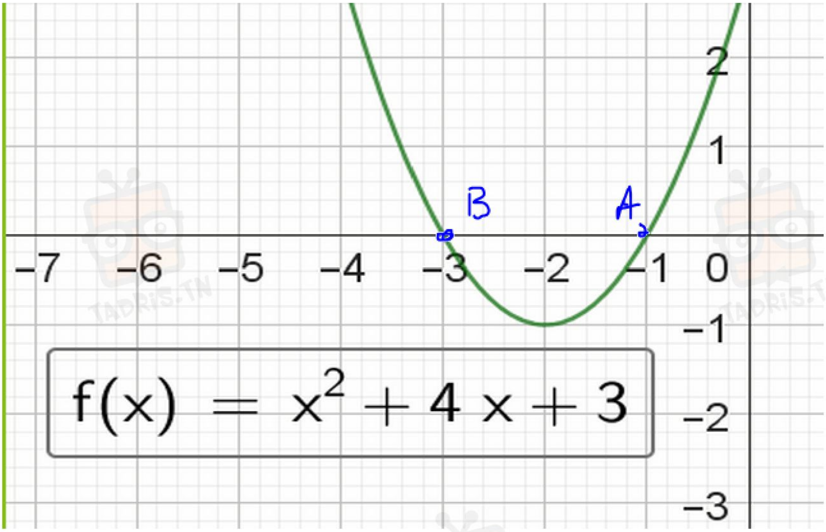
- Si $\Delta > 0$ → **2 solutions réelles distinctes** → 2 points d'intersection
- Si $\Delta = 0$ → **1 seule solution réelle double** → la parabole touche l'axe
- Si $\Delta < 0$ → **aucune solution réelle** → la parabole **ne coupe pas** l'axe des abscisses



$$f(x) = 0 \iff x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$\iff (x+2)^2 = 0$$
$$\iff x = -2$$

La parabole touche l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse $x = -2$

$$P \cap (O\vec{i}) = \{A\} \text{ tq } A(-2, 0)$$



$f(x) = 0 \iff x^2 + 4x + 3 = 0$

$a = 1$, $b = 4$ et $c = 3$

$a - b + c = 0 \iff x = -1$ ou $x = -3$

$\mathscr{P} \cap (O\vec{i}) = \{A, B\}$ tq $A(-1, 0)$ $B(-3, 0)$

$x^2 - 4x - 1 = 0$

$a = 1$, $b = -4$ et $c = -1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 20$

$x = \dfrac{4 - \sqrt{20}}{2} = 2 - \sqrt{5}$ ou $x = 2 + \sqrt{5}$

$x^2+4x+5=0$

$\Delta = 4^2-4\times 5=-4<0$

$P \cap (O\vec{\jmath}) = \emptyset$

📌 Définition

L'intersection d'une courbe $\mathcal{C}_f$ avec **l'axe des ordonnées** correspond au point où $x = 0$.

Autrement dit, il suffit de **calculer** $f(0)$.

$f(x) = x^2+4x+3$

$f(0)=3$

$\mathcal{P} \cap (O\vec{\jmath}) = \{C\}$ tq $C(0,3)$